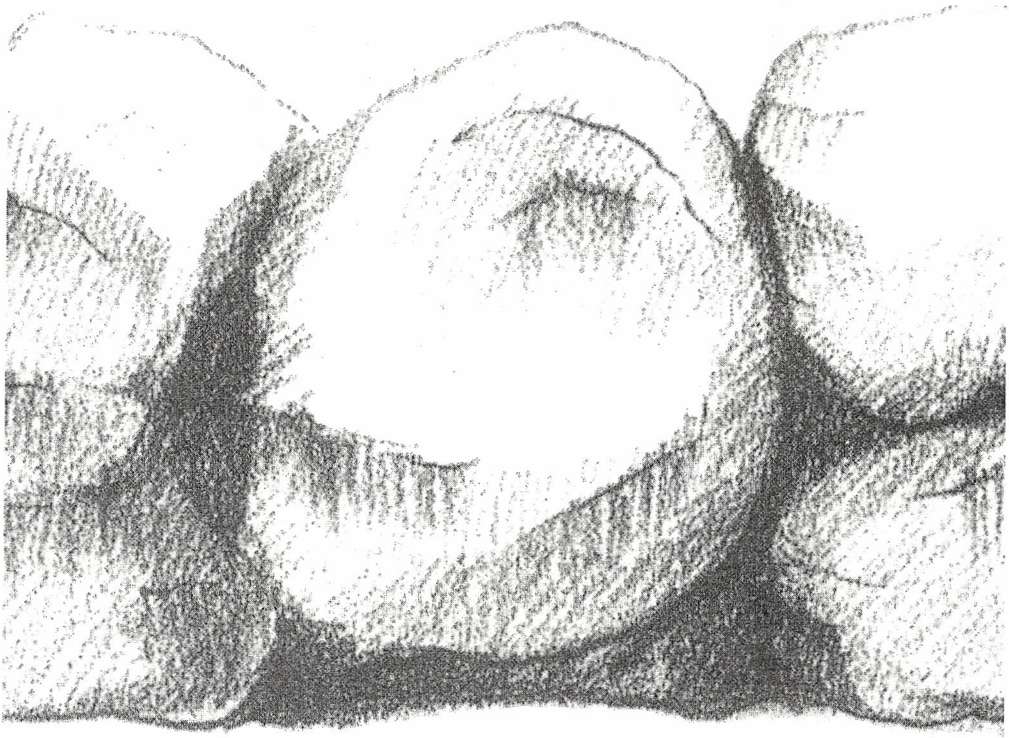

A. Já acordaste?

B. Que noite horrível! Não parei de me mexer e virar, a minha cabeça andou sempre às voltas. Sonhei que fazia deduções lógicas, mas quando acordei verifiquei que se tratava só de disparates.

A. Talvez esta matemática não esteja a fazer-nos bem. Estávamos tão contentes ontem, mas...

B. (*interrompendo*) Sim, ontem estávamos na maior com a matemática, mas hoje temos uma sensação amarga. Não consigo repousar, *temos* de obter mais resultados antes de pararmos de novo para descansarmos. Onde está o lápis?

A. Bill, precisas de tomar o pequeno-almoço. Temos damascos e figos.

B. OK, mas tenho de me dedicar ao trabalho rapidamente.

A. Na realidade, também estou com curiosidade de ver o que vai passar-se, mas promete-me uma coisa.

B. O quê?

A. Hoje só vamos trabalhar em somas e subtracções. *Não* em multiplicações. Só vamos olhar para a outra parte da inscrição mais tarde.

B. Concordo. Quase quero adiar a multiplicação indefinidamente, já que parece tão complicada.

A. (*beijando-o*) OK, agora descontrai-te.

B. (*espreguiçando-se*) És tão boa para mim, Alice.

A. Assim está melhor. Ontem à noite estive a pensar na maneira como ontem de manhã resolveste o problema sobre todos os números. Acho que se trata de um princípio importante que deveríamos distinguir como um teorema. Isto é:

> Dado um número y, se x for o primeiro número criado com a propriedade de
>
> $$Y_E < x \quad \text{e} \quad x < Y_D, \quad \text{então} \quad x \equiv y\,. \tag{12}$$

B. Hum... creio que isso *é* o que provámos. Vejamos se conseguimos reconstruir a demonstração com o novo simbolismo. Se bem me lembro, construímos o número $z = (Y_E \cup X_E, X_D \cup Y_D)$ e tínhamos $x \equiv z$, de acordo com (9). Por outro lado, nenhum elemento x_E de X_E satisfaz $Y_E < x_E$ porque x_E foi criado antes de x; portanto, cada x_E é $\leqslant$ algum y_E, de acordo com (6). Logo $X_E < y$ e, analogamente, $y < X_D$. Portanto, $y \equiv z$, de acordo com (9).

É muito fácil trabalhar agora que dispomos de toda esta munição.

A. O que é bom em (12) é que facilita muito os cálculos que efectuámos ontem à noite. Quando estávamos a calcular $b+b = (\{b\}, \{b+1\})$, podíamos ter visto logo que 1 é o primeiro número a ser criado entre $\{b\}$ e $\{b+1\}$.

B. Ei, deixa-me tentar com $c+c$: é o primeiro número a ser criado entre $b+c$ e $1+c$. Bem, tem de ser $b+1$, isto é, $1\frac{1}{2}$; logo, c é $\frac{3}{4}$. É uma surpresa, pensava que seria $\frac{2}{3}$.

A. E d é $\frac{1}{4}$.

B. Certo.

A. Acho que o padrão é agora claro: após quatro dias os números $\geqslant 0$ são

$$0\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ 1\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ 2\ ,\ 3$$

e após cinco dias deverão ser

B. (*interrompendo*)

$$0\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{3}{8}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{5}{8}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{7}{8}\ ,\ 1\ ,\ \frac{5}{4}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{7}{4}\ ,\ 2\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ 3\ ,\ 4\,.$$

A. Exactamente. Consegues demonstrá-lo?

B. ....

Sim, mas é mais difícil do que pensei. Por exemplo, para determinar o valor de $f = \left(\{\frac{3}{2}\}, \{2\}\right)$, que se revelou ser $\frac{7}{4}$, calculei $f+f$. Este é o primeiro número a ser criado entre 3 e 4, e tive de "olhar para o futuro" para ver que era $\frac{7}{2}$. Estou convencido de que temos o padrão certo, mas era bom dispor de uma prova.

A. No quarto dia calculámos $\frac{3}{2}$, sabendo que ele era $1+\frac{1}{2}$, e *não* tentando $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$. Talvez somar 1 ajude.

B. Deixa-me ver... De acordo com a definição, a regra (10),

$$1 + x = ((1 + X_E) \cup \{x\}, 1 + X_D)\ ,$$

pressupondo que $0 + x = x$. Na realidade, não é verdade que... claro, para números positivos podemos sempre escolher X_E, de forma que $1 + X_E$ tenha um elemento $\geqslant x$, o que simplifica para

$$1 + x = (1 + X_E, 1 + X_D)$$

neste caso.

A. É isso, Bill! Olha para os últimos oito números do quinto dia, são simplesmente uma unidade maiores do que os números do quarto dia.

B. Perfeito! Falta somente provar que o padrão dos números entre 0 e 1 é este. Mas isso pode sempre ser feito analisando $x + x$, que é menor do que 2!

A. Sim, agora tenho a certeza de que descobrimos o padrão certo.

B. Que alívio. Nem sequer sinto necessidade de formalizar a demonstração, *tenho a certeza* de que está certa.

A. Será que a nossa regra para $1 + x$ é um caso particular de um princípio mais geral? Será que temos sempre

$$y + x = (y + X_E, y + X_D)\,?$$

Isto seria muito mais simples do que a complicada regra de Conway.

B. Parece lógico, já que somar y deveria corresponder a "deslocar" y unidades. Ups, não, experimenta $x = 1$; seguir-se-ia que $y + 1$ é $(\{y\}, \emptyset)$, o que falha quando y é $\frac{1}{2}$.

A. Desculpa. De facto, a tua regra para $1 + x$ também não funciona com $x = 0$.

B. Certo, só a provei para x positivo.

A. Creio que devíamos analisar atentamente a regra (10), a regra da adição, e ver o que podemos provar na generalidade a partir dela. Tudo o que obtivemos resume-se a *nomes* para números. Estes nomes estarão correctos se os números de Conway se comportarem como os números habituais, mas não sabemos se as regras de Conway são as mesmas. Para além disso, acho uma maravilha que possamos deduzir muitas coisas de poucas regras básicas iniciais.

B. Vejamos. Em primeiro lugar, a adição é aquilo a que costumamos chamar comutativa, isto é,

$$x + y = y + x\,. \tag{13}$$

A. Certo. Agora vamos provar o que Conway apregoou, que

$$x + 0 = x\,. \tag{14}$$

B. A regra diz que

$$x + 0 = (X_E + 0, X_D + 0)\ .$$

Portanto, basta, de novo, um argumento por indução no "dia da criação". Podemos supor que $X_E + 0$ é o mesmo que X_E e que X_D é o mesmo que X_D, porque todos esses números foram criados antes de x. QED.

A. Provámos que $x + 0 \equiv x$, e não $x + 0 = x$, não foi?

B. És uma piquinhas. Posso alterar (14), se quiseres, não vai fazer diferença nenhuma. Mas, de facto, a demonstração não estabelece que os conjuntos de $x + 0$ são exactamente os mesmos de x?

A. Desculpa-me outra vez, tens razão.

B. E já cá cantam dez teoremas. Continuamos, agora que estamos a carburar bem?

NÚMEROS SURREAIS / DONALD E. KNUTH ; TRAD. JORGE NUNO SILVA

AUTOR(ES):	Knuth, Donald E.; Silva, Jorge Nuno Oliveira e, 1956-, trad.
EDIÇÃO:	1a ed
PUBLICAÇÃO:	Lisboa : Gradiva, 2002
DESCR. FÍSICA:	111, [4] p. ; 23 cm
COLECÇÃO:	O prazer da matemática ; 29
NOTAS:	Tít. orig.: surreal numbers
ISBN:	972-662-853-9